第 21 章　量子力学简介

一　德布罗意波

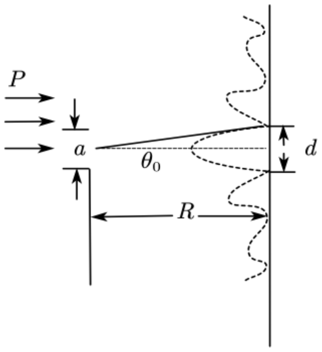
· 实物粒子同样具有波粒二象性，波长 λ 由动量确定，频率 ν 由能量确定

$$\boxed{E=mc^2=h\nu} \xleftrightarrow{E=p^2/2m} \boxed{p=mv=\frac{h}{\lambda}}$$

例 1　电子显微镜中的电子从静止开始通过电势差为 U 的静电场加速后，其德布罗意波为 0.04nm，则 U 约为________V.

解　由德布罗意波，$E=eU=\dfrac{p^2}{2m}=\dfrac{h^2}{2m\lambda^2}$，因而 $U=\dfrac{h^2}{2me\lambda^2}=943\text{V}$

例 2　如图所示，一束动量为 p 的电子通过缝宽为 a 的狭缝。在距离狭缝处放置一荧光屏屏上衍射图样中央最大的宽度 d 等于____________.



解　由 $\lambda=\dfrac{h}{p}$ 转化为第 17 章的问题，结果为 $d=\dfrac{2Rh}{ap}$

二　不确定性理论

① **动量与位置的不确定关系**

$$\boxed{\Delta x\Delta p_x\geq\frac{h}{4\pi}}$$

② **能量和时间的不确定性关系**

$$\boxed{\Delta E\Delta t\geq\frac{h}{4\pi}}$$

· 微观粒子的(位置和动量)/(处于某个状态的时间与能量)不可能**同时**准确测定

例 3　波长 $\lambda=500\text{nm}$ 的光沿 x 轴正向传播，若光的波长的不确定量 $\Delta\lambda=10^{-4}\text{nm}$，试利用不确定关系求光子的 x 坐标的不确定量

解　由光子动量 $p_x=\dfrac{h}{\lambda}$，得 $\Delta p_x=\left|p-p'\right|=\left|\dfrac{h}{\lambda}-\dfrac{h}{\lambda'}\right|=h(\dfrac{\lambda'-\lambda}{\lambda\lambda'})=h\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$

由不确定性关系 $\Delta x\Delta p_x\geq\dfrac{\hbar}{2}$，得 $\Delta x\geq\dfrac{\hbar}{2\Delta p_x}=\dfrac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda}=0.199\text{m}$

例 4　一电子处于原子某能态的时间为 10^{-8}s，计算该能态能量的最小不确定量；设电子从上述能态跃迁到基态所对应的光子能量为 3.39eV，试确定所辐射光子的波长即其最小不确定量

解　电子处于某能态的时间就是 Δt，由不确定性关系 $\Delta E\geq\dfrac{h}{4\pi\Delta t}=5.276\times10^{-27}\text{J}$

由光子能量 $E=hc/\lambda$，得 $\lambda=\dfrac{hc}{E}$，因此不确定量 $\Delta\lambda=hc\dfrac{\Delta E}{E^2}=3.57\times10^{-15}\text{m}$

· 本题型的核心在于将已知或所求的物理量的不确定量与坐标、动量、能量、时间的不确定量相关联

若 $y=k/x$，**则** $\Delta y=k\Delta x/x^2$

三　波函数

1. 波函数与概率密度

- 波函数 $\Psi(x,y,z,t)$ 是空间与时间的函数，里面蕴含了粒子的运动状态

  当粒子运动状态不随时间变化时，波函数为定态波函数 $\psi(x,y,z)$
- 波函数的值可能是复数，它的模长平方 $|\Psi(x,y,z,t)|^2=\Psi^*\Psi$ 代表粒子在对应点出现的概率密度
- 波函数的要求：① $\Psi(x,y,z,t)$ 是单值函数　② $\Psi(x,y,z,t)$ 是连续函数　③ $\Psi(x,y,z,t)$ 是有限函数

  ④ 归一化条件：$\iiint\limits_V \Psi^*\Psi\,\mathrm{d}V=1$（粒子在全空间内出现概率应为 1）

2. 一维无限深势阱

- 指粒子在某一区间内势能为 0，其余区间势能为无穷大，由薛定谔方程，其只在该区间内出现

常考：一维波函数分析

已知未归一化的波函数，求归一化常数、概率密度函数、最大概率密度位置、某区间概率等

核心：$\psi^2(x)$ 是粒子出现在 x 处的概率密度

① 令 $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^2(x)\mathrm{d}x=1$，求出归一化常数 A

② 然后代入该常数得到波函数，进而得到概率密度函数 $f(x)=\psi^2(x)$

③ 最大概率密度位置通过对 $f(x)$ 求导得到，区间 (a,b) 出现的概率为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

本题型唯一的难点就是求定积分，请复习《微积分 I》对应内容（当然求积分值就直接按计算器）

例 5　设一粒子处在宽度为 L 的一维无限深势阱中，当粒子在第一激发态时，其波函数 $\psi(x)=A\sin\dfrac{2\pi x}{L}$，$0<x<L$。求：（1）归一化常量 A；（2）粒子分布的概率密度函数；（3）粒子出现概率最大的位置；（4）在 $0\sim L/3$ 范围内发现粒子的概率。

解　（1）由归一化条件：$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^L A^2\sin^2\dfrac{2\pi x}{L}\mathrm{d}x=A^2\dfrac{L}{2}=1 \;\rightarrow\; A=\sqrt{\dfrac{2}{L}}$

（2）概率密度函数 $f(x)=\psi^2(x)=\dfrac{2}{L}\sin^2\dfrac{2\pi x}{L}$

（3）（当波函数为三角函数时，$f(x)$ 求导没有直接从三角函数入手方便）

由三角函数的性质，当 $\sin\dfrac{2\pi x}{L}=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值

此时 $\dfrac{2\pi x}{L}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \;\rightarrow\; x=(\dfrac{1}{4}+k)L$　由于 $0<x<L$，因此 k 取值为 0，1

因此出现概率最大的位置可能是 $\dfrac{L}{4}$ 和 $\dfrac{3}{4}L$

（4）概率为 $\dfrac{2}{L}\int_0^{L/3}\sin^2\dfrac{2\pi x}{L}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4\pi}\sin\dfrac{4\pi}{3}=0.4$